Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

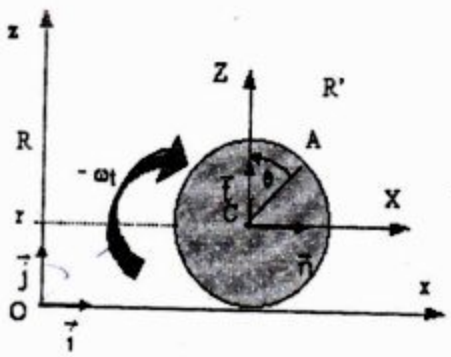
Année Univ : 08 –09
SMA / SMI

TD de Mécanique

Série n°2

Exercice 1 : Lundi

Un disque de rayon r tourne **uniformément** autour de son axe, à vitesse angulaire ω, dans le sens indiqué sur la figure. Son centre C se déplace sur la droite horizontale z=r du plan Oxz du référentiel R(O,xyz). On appelle R' le référentiel (C,XYZ), en translation par rapport à R, d'origine C, et on note θ l'angle que fait un rayon CA du disque avec CZ.



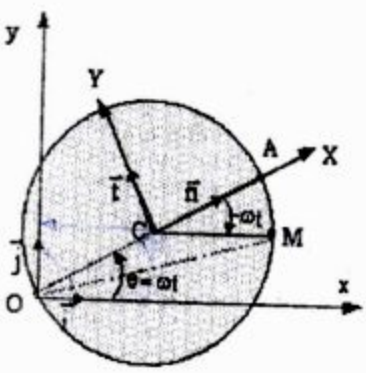
1°) Exprimer, dans la base de R, la vitesse et l'accélération de A par rapport à R'.

2°) Quelle vitesse, par rapport à R, doit-on donner à C pour que la vitesse $V_{B/R}$ (vitesse de B dans R) du point le plus bas B du disque soit nulle ?

3°) Trouver les équations x =x(θ) et z=z(θ) du point A, sachant que pour θ =0, x=0 et z =2r.

Exercice 2 : Samedi

Dans un plan Oxy un cercle de diamètre OA tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On associe au centre du disque deux axes rectangulaires CX et CY. A t= 0, le point A est sur Ox et un point M initialement en A parcourt la circonférence dans le sens contraire au sens trigonométrique avec la vitesse angulaire ω.



1°) Exprimer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère Oxy.

ETUSUP .com

2°) Exprimer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère $C\vec{X}Y$.

3°) Déterminer les expressions de la vitesse et l'accélération d'entraînement.

Problème : CC1 *(07-08)*

Un tube contenant un ressort de constante de raideur k, est lié rigidement à une tige verticale (l'axe Oz), en faisant un angle θ constant. Une extrémité du ressort est accroché au centre O du repère galiléen $\Re(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, et dans l'autre extrémité un point matériel M de masse m, glisse sans frottement à l'intérieur du tube. Le point matériel M est soumis à une force de rappel $\vec{F} = -K.\overrightarrow{OM}$.

Ce tube a par rapport à $\Re$ un mouvement de rotation uniforme caractérisé par le paramètre $\varphi=\omega t$. On appelle $\Re_T(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ le repère lié au tube.

1°/ Faire un schéma de l'ensemble en spécifiant les deux repères choisis. *(1 pt)*

2°) Calculer la vitesse relative $\vec{V}_r(M)$, et l'accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$. *(2 pts)*

3°/ Calculer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$, en déduire $\vec{V}_a(M)$. *(2 pts)*

4°/ Calculer $\vec{\gamma}_e$, $\vec{\gamma}_c$, et en déduire $\vec{\gamma}_a(M)$. *(2 pts)*

5°/ Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m selon que l'on se place dans le référentiel galiléen $\Re$ ou dans $\Re_T$? *(2 pts)*

6°) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles du mouvement et les résoudre dans le cas où $\omega^2 < \frac{K}{m}$. *(2 pts)*

7°) Donnez les composantes de la réaction R en fonction du temps. *(1 pt)*

Remarque : les conditions initiales sont : à t = 0, $r = a$ *et* $\dot{r} = 0$.

ETUSUP .com

SÉRIE n° 2

EXERCICE 2

1/ $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$

Posant R le rayon du cercle,

On a : $\vec{OM} = R\cos\theta\,\vec{e_x} + R\sin\theta\,\vec{e_y} + R\cos\omega t\,\vec{n} + R\sin\omega t\,\vec{t}$

- $\vec{n} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} = \cos\omega t\,\vec{e_x} - \sin\omega t\,\vec{e_y}$
- $\vec{t} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} = -\sin\omega t\,\vec{e_x} + \cos\omega t\,\vec{e_y}$

$$\Rightarrow \vec{OM} = R\Big[(\cos\theta\,\vec{e_x} + R\sin\theta\,\vec{e_y}) + \cos\omega t(\cos\omega t\,\vec{e_x} - \sin\omega t\,\vec{e_y}) + \sin\omega t(-\sin\omega t\,\vec{e_x} + \cos\omega t\,\vec{e_y})\Big]$$

$$= R\cos\theta\,\vec{e_x} + R\sin\theta\,\vec{e_y} + R\cos^2\theta\,\vec{e_x} - R\cos\omega t\sin\omega t\,\vec{e_y} - R\sin^2\omega t\,\vec{e_x} + R\sin\omega t\cos\omega t\,\vec{e_y}$$

$$\vec{OM} = R\cos\theta\,\vec{e_x} + R\sin\theta\,\vec{e_y} + R\vec{e_x}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= R\cos\theta\,\vec{e_x} + R\sin\theta\,\vec{e_y} + R\vec{e_x}.$$

Par suite :

$$\vec{V_a} = \frac{d\vec{OM}}{dt}/R = -R\omega\sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega\cos\omega t\,\vec{e_y}$$

$$\vec{\gamma_a} = \frac{d\vec{V}}{dt}/R = -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{e_x} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_y}$$

(2) $\vec{CM} = R\cos(-\omega t)\,\vec{e_x} + R\sin(-\omega t)\,\vec{e_y} = R\cos\overset{\omega t}{\theta}\,\vec{e_x} - R\sin\omega t\,\vec{e_y}$

$$\vec{V_r} = \frac{d\vec{CM}}{dt}/R' = -R\omega\sin\omega t\,\vec{e_x} - R\omega\cos\omega t\,\vec{e_y}$$

$$\vec{\gamma_r} = -R\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_y}$$

(3) $\vec{V_e} = \frac{d\vec{OC}}{dt}/R + \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{CM}$

$$= -R\omega\sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega\cos\omega t\,\vec{e_y} + \omega\vec{e_z} \wedge R\vec{e_x}$$

$$= -R\omega\sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega\cos\omega t\,\vec{e_y} + (\omega R)\vec{e_y}$$

$$= -R\omega\sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega(\cos\omega t + 1)\,\vec{e_y}$$

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{OC}}{dt}/R + \overset{0}{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} \wedge \vec{CM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{CM})$$

$$= -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{e_x} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_y} + \omega\vec{e_z} \wedge (\omega\vec{e_z} \wedge R\vec{e_x})$$

$$= \quad '' \quad '' \quad + \omega\vec{e_z} \wedge (\omega R\,\vec{e_y})\} = -\omega^2 R\vec{e_x}$$

ETUSUP .com

Problème : CCI (07 - 08)

(1) $\vec{OM} = r\vec{e_r}$

(2) $\vec{V_r}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_{R_T} = \dot{r}\vec{e_r} + r\underbrace{\frac{d\vec{e_r}}{dt}\Big/_{R_T}}_{=0} = \boxed{\dot{r}\vec{e_r}}$

$\vec{\gamma_r}(M) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V_r}}{dt} = \boxed{\ddot{r}\vec{e_r}}$

(3) $\vec{V_e} = \vec{V_a} - \vec{V_r}$ Aussi : $\vec{V_e} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}\Big/_R}_{\vec{OO'}=0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ [avec $\vec{\Omega} = \vec{\omega_1} + \vec{\omega_2} = \dot{\varphi}\vec{e_z} + \underbrace{\dot{\theta}\vec{e_\varphi}}_{=0}$]

$\vec{V_e} = \dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge r\vec{e_r}$

$= \dot{\varphi}\cos\theta\underbrace{\vec{e_r} \wedge r\vec{e_r}}_{=0} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\theta} \wedge r\vec{e_r}$

$= \dot{\varphi} r \sin\theta\vec{e_\varphi}$

[$\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} = -\vec{e_\varphi}$
avec $\dot{\varphi} = \omega$]

$\boxed{\vec{V_e} = \omega r \sin\theta\vec{e_\varphi}}$

$\Rightarrow \vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} = \boxed{\dot{r}\vec{e_r} + r\omega\sin\theta\vec{e_\varphi} = \vec{V_a}}$

(4) $\vec{\gamma_a} = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\Big/_R}_{=0} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=0} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OM}}_{\vec{V_e}})$

- $\vec{\omega} \wedge \vec{V_e} = \vec{\omega}\vec{e_z} \wedge \omega r\sin\theta\vec{e_\varphi}$

$= (\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_r} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge \omega r\sin\theta\vec{e_\varphi}$

$= -\dot{\varphi}\omega r\cos\theta.\sin\theta\vec{e_\theta} - \dot{\varphi}\omega r\sin^2\theta\vec{e_r}$

$= -\omega^2 r\cos\theta.\sin\theta\vec{e_\theta} - \omega^2 r\sin^2\theta\vec{e_r}$

$\vec{\gamma_e} = -\omega^2 r\sin\theta(\cos\theta\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_r})$

- $\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r} = 2\omega\vec{e_z} \wedge \dot{r}\vec{e_r}$

$= 2\omega(\cos\theta\vec{e_r} - \omega\sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge \dot{r}\vec{e_r} = 2\omega(+\omega\dot{r}\sin\theta\vec{e_\varphi}$ [illegible] $\vec{e_\varphi}$

ETUSUP .com

$* \vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$

$= \ddot{r}\vec{e_r} + \left(-\omega^2 r \sin\theta\cos\theta\, \vec{e_\theta} - \omega^2 r \sin^2\theta\, \vec{e_r}\right) + 2\omega^2 \dot{r} \sin\theta\, \vec{e_\varphi}$

$= \left(\ddot{r} - \omega^2 r \sin^2\theta\right)\vec{e_r} - \omega^2 r \sin\theta\cos\theta\, \vec{e_\theta} + 2\omega^2 \dot{r}\sin\theta\, \vec{e_\varphi}$

(5) Si on se place dans R : $\vec{P}, \vec{F}, \vec{R}$

Et dans R_T : $\vec{P}, \vec{F}, \vec{R}, \vec{F_{ie}}, \vec{F_{ic}}$

$\Rightarrow \sum \vec{F_{ext}} = m\vec{\gamma_a}$

$\Leftrightarrow \sum \vec{F_{ext}} + \vec{F_{ic}} + \vec{F_{ie}} = m\vec{\gamma_r}$

P.F.D : $\sum \vec{F_{ext}} + \vec{F_{ic}} + \vec{F_{ie}} = m\ddot{r}\vec{e_r}$

- $\vec{P} = -mg\vec{e_z} = -mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta})$
- $\vec{F} = -K\vec{OM} = -Kr\vec{e_r}$
- $\vec{R}(\perp \vec{e_r}) = R\theta\vec{e_\theta} + R\varphi\vec{e_\varphi}$

$\Leftrightarrow -mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) - Kr\vec{e_r} + R\theta\vec{e_\theta} + R\varphi\vec{e_\varphi} = +m\vec{\gamma_a}$

$\Leftrightarrow -mg\cos\theta\vec{e_r} - Kr\vec{e_r} + mg\sin\theta\vec{e_\theta} + R\theta\vec{e_\theta} + R\varphi\vec{e_\varphi} = \cancel{m\ddot{r}}$

$= (m\ddot{r} - m\omega^2 r\sin^2\theta)\vec{e_r} - m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_\theta} + 2m\omega^2\dot{r}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cancel{m}g\cos\theta - \frac{K}{m}r = +\cancel{m}\ddot{r} - \cancel{m}\omega^2 r\sin^2\theta \\ mg\sin\theta + R\theta = -m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta \\ R\varphi = +2m\omega^2\dot{r}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{r} = -g\cos\theta - \frac{K}{m}r + \omega^2 r\sin^2\theta & (1) \\ 0 = mg\sin\theta + R\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta & (2) \\ 0 = R\varphi - 2m\omega^2\dot{r}\sin\theta \end{cases}$$

(1) eq^t diff $\ddot{r} + \left(\frac{K}{m} - \omega^2\sin^2\theta\right)r = 0$

Or $\omega^2 < K/m$

et sachant que : $0 \leq \sin^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2\theta . \omega \leq \omega^2$

$r = e^{\alpha t} \Rightarrow \dot{r} = \alpha' e^{\alpha t} \Rightarrow \ddot{r} = \alpha^2 e^{\alpha t}$

$\Rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t} + r^2 e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + r^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = \pm i r$

$\Rightarrow r = Ae^{irt} + Be^{-irt}$

ETUSUP .com

• Sol° particulière :

$r_p = cte = C \Rightarrow \ddot{r}_p = 0$

$\Rightarrow \quad 0 + \Omega^2 r_p = -g\cos\theta \Rightarrow r_p = \dfrac{-g\cos\theta}{\Omega^2}$

• Solution générale :

$r = r_{ssm} + r_p = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} + r_p$

Conditions initiales :

$t = 0, \quad r = a, \quad \dot{r} = 0$

$r(0) = a = A + B + r_p$

$\dot{r}(0) = 0 = i\Omega A - i\Omega B + 0 \quad = A = B$

$A = B = \dfrac{a - r_p}{2} \qquad r = \dfrac{a - r_p}{2}\left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right) + r_p$

(7) $\quad (2) \Rightarrow \quad R\theta = -mg\sin\theta - mr\omega^2\sin\theta\cos\theta$

$R\theta = -mg\sin\theta - m\left[(a - r_p)\cos\Omega t + r_p\right]\omega^2\sin\theta\cos\theta$

$(3) \Rightarrow \quad R\varphi = 2m\dot{r}\omega\sin\theta = -2m(a-b)\Omega\sin\Omega t$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..